数理科学会　第 44 回数理科学講演会講演論文集
[2025. 8. 30　東京都立産業技術高等専門学校 品川キャンパス]

放射状不足膨張噴流の振動モードに関する研究

A Study on Oscillation Modes of Underexpanded Radial jet

○石川 隼(東電大・院)　大川 達也 (東電大・院)　前田和大 (東電大・院)
榊原 洋子 (東電大)　遠藤 正樹 (東電大)
Shun ISHIKAWA, Tokyo Denki University, Ishizaka, Hatoyama-machi, Hiki-gun, Saitama 350-0394
Tatsuya OHKAWA, Tokyo Denki University, Ishizaka, Hatoyama-machi, Hiki-gun, Saitama 350-0394
Kazuhiro MAEDA, Tokyo Denki University, Ishizaka, Hatoyama-machi, Hiki-gun, Saitama 350-0394
Yoko SAKAKIBARA, Tokyo Denki University, Ishizaka, Hatoyama-machi, Hiki-gun, Saitama 350-0394
Masaki ENDO, Tokyo Denki University, Ishizaka, Hatoyama-machi, Hiki-gun, Saitama 350-0394

1.　序論

先細ノズルから大気中へ噴出する超音速噴流のうち，臨界圧力比以上で噴出する噴流は不足膨張噴流と呼ばれる．ノズル出口から噴出し，噴流の内部で発生した膨張波は，噴流境界で反射し圧縮波となる．これらの圧縮波が重なり合うことで斜め衝撃波が形成される．膨張波と圧縮波の影響により膨張領域と圧縮領域を持つ非一様な流れが形成され，噴流は樽型のショックセルと呼ばれる特徴的な形状となる．

不足膨張噴流は，レーザ加工時に発生する溶融くずを吹き飛ばすアシストガス(1)や強化ガラス製造時の急冷ガス(2)など，工業分野で幅広くみられる．噴流を加工物に衝突させた際に生じる壁面噴流は，放射状に広がる不足膨張噴流となることがある．この壁面噴流は，噴流中に強い衝撃波を発生させる．衝撃波と噴流境界に沿って発達するじょう乱が互いに干渉することで，強い音響波がノズル出口方向へ放射される．ノズル出口に達した音響波が主噴流と干渉し，新たなじょう乱の生成を励起することでフィードバックループが閉じられる(3)(4)．その結果，スクリーチと呼ばれる高周波で狭帯域の騒音が発生し，噴流は激しい自励振動を起こす．これらの騒音や振動は，作業環境の悪化や噴流を噴出する装置または衝突する加工物の疲労破壊を招く．しかし，放射状に噴出する不足膨張噴流に関する研究報告は少なく，その挙動は未解明な点が多い．この噴流は，工業分野において多岐にわたる場面で発生する現象であるため，その物理的特性を解明することは極めて重要である．

そこで，本研究では図 1 で示すとおり，向かい合わせに設置した 2 本の円筒から構成されるラジアルノズルを考える．互いに向かい合った円筒の隙間から，放射状に広がる自由噴流が噴出される．実際の流れ場は，主噴流や壁面の影響を受けた複雑な流れであると考えられるが，本研究では，噴流が放射状に広がることによる影響に着目し，複数の振動形態が存在する噴流の挙動とスクリーチのメカニズムを解明することを目的とする．

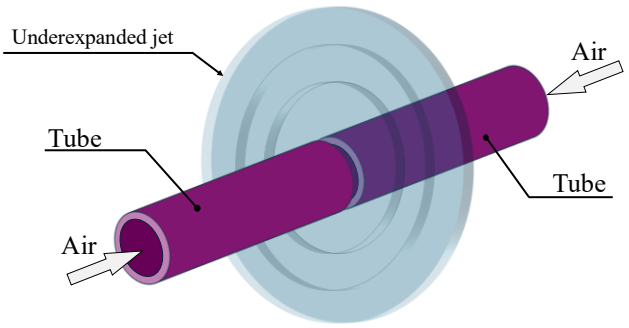


Fig.1 Radial nozzle

本稿では，放射状不足膨張噴流の流れ場や噴流構造，衝撃波の振動について調査した．また，同様のノズル幅，圧力比で二次元噴流の解析も行い，放射状噴流のセル構造と比較を行った．

2.　計算モデルおよび数値解析法

本研究で用いた放射状不足膨張噴流の計算モデルを図 2 に示す．本解析におけるラジアルノズルは，向かい合った 2 本の円筒から構成され．直径Dは 12.0 mm である．各円筒内から圧縮空気が供給され，円筒端面間の幅$b = 2$ mm を通して噴流が大気中に噴出される．図中で示されている L_1～L_3 は衝撃波同士の間隔（以下セル長さと呼ぶ）を表しており，それぞれ上流から下流へ向かって第 1～第 3 セルと呼ぶ．放射状噴流におけるスクリーチの音源は，第 3 セル付近であるとされている(8)ため，圧力は第 3 セル終端で発生する衝撃波（以下第 3 衝撃波と呼ぶ）の位置で記録した．ノズル圧力比p_0/p_a（p_0：ノズル内部のよどみ点圧力，p_a：大気圧）は 3.0 から 6.0 まで 0.2 刻みずつ解析を行った．円筒中心軸（x軸）に対して軸対称，噴流中心面（y 軸）に対して対称な流れ場を仮定し，図中の青線とノズル壁面，噴流中心面で囲われた領域を計算領域としている．基礎式は軸対称オイラー方程式を使用し，時間および空間ともに 2 次精度を有する Yee の対称型 TVD（Total Variation Diminishing）法(5)を適用した．

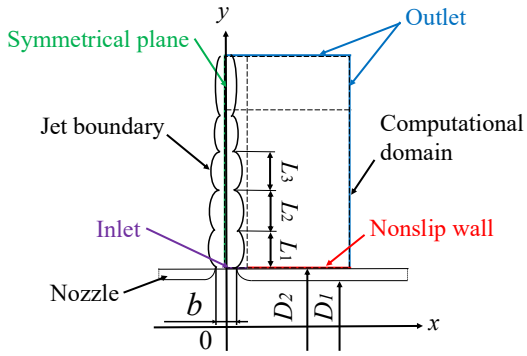


Fig.2 Computational model

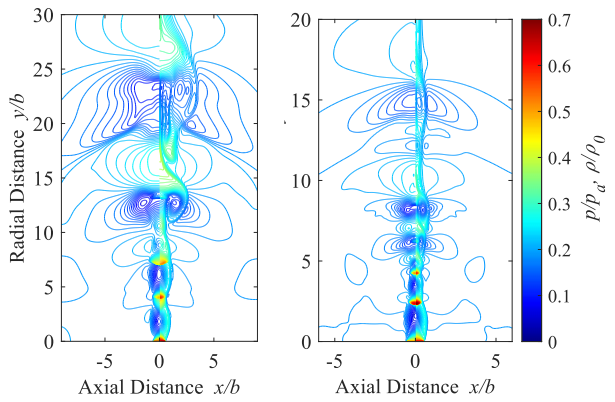
3.　結果および考察

3.1　流れ場の解析

図 3 に瞬間における噴流の流れ場を示す．圧力比は 5.2 であり，図 2(a)は二次元噴流，図 2(b)は放射状噴流を示している．どちらの図も噴流中心面より右側の領域が密度，左側の領域が圧力を表している．二次元，放射状ともにセル構造が形成されており，第 3 セルより下流の領域では渦が支配的な流れ場となっている．二次元噴流は各セル長さ

が等しく，二次元噴流の特徴を良く捉えている．放射状噴流の流れ場は，下流の領域になるにつれて噴流の幅が徐々に狭まっていき，セル長さも短くなっていく様子が確認できる．これは，放射状噴流がラジアルノズルの中心軸から外側に向かって円周が長くなるように広がっているため，連続の式に従い，断面積を一定に保つために噴流幅は下流であるほど小さくなる[6]．この放射状噴流特有のセル構造により，フィードバックループの距離が二次元噴流や軸対称噴流とは異なっていると考えられる．

二次元噴流は各セル長さが一定であるため，Tam の理論式[7]によりセル長さを予測することができる．しかし，放射状噴流は，下流の領域にかけてセルが短くなるため，Tam の理論式をそのまま適用することはできない．よって，放射状噴流のセル長さに関して，詳細な調査が必要である．次に，各圧力比におけるセル長さを測定し，調査を行った．



(a) Two-dimensional jet　(b) Radial jet

Fig.3 Flow field

3.2　セル長さ

図 4 に噴流中心面における時間平均の圧力分布を示す．縦軸が圧力，横軸は噴流中心面におけるノズル出口からの距離である．ノズル出口から下流にかけて，圧力が上昇および下降を 3 回ほど繰り返していることがわかる．圧力が最大となるピークは，衝撃波が振動している中心を表している．図中の矢印で示すように，圧力が最大となるピーク同士の間隔を測定することで L_1～L_3 のセル長さを決定した．

図 5 は各圧力比に対する放射状噴流のセル長さを示した図である．縦軸がノズル幅 b で無次元化されたセル長さ，横軸が圧力比である．マーカーで塗られた円形のプロットは本解析で得られたセル長さ L_1～L_3 であり，白抜きの円形のプロットは川崎の実験[8]で得られたセル長さ l_1～l_3 である．ただし，川崎の実験では圧力比 5.0 までのセル長さを確認しているため，圧力比 5.2 以上は解析で得られたセル長さのみをプロットしている．

本解析で得られたセル長さは，圧力比の増大とともに長くなっていく傾向を示した．特に，第 1 セルおよび第 2 セル長さは，川崎の実験で得られた値と良く一致していることがわかる．また，各セル長さは，下流の領域になるにつれて上流のセルよりも短くなっており，圧力比が大きいとその傾向は顕著である．一方で，解析における第 3 セル長さは，圧力比 4.0 から 5.0 にかけて実験値よりも L/b =0.5 程度長くなっている．第 3 セルは渦が支配的な領域であるため，噴流境界を移流する渦によってセルが歪められ，上流側のセルよりも激しく伸縮する．本解析では粘性の影響を無視しているため，渦の減衰が起こりにくく，セル長さが川崎の実験[8]よりも大きくなったと考えられる．以上のことから，本解析は放射状噴流でみられるセル構造の特徴を実験結果と概ね一致して捉えており，十分に再現していることがわかる．

このように，セル構造を正確に捉えることは，スクリーチ周波数を予測するうえで重要な指標となる．矩形噴流および軸対称噴流において，スクリーチ周波数を予測する理論式は Tam[7]によって導かれている．しかし，矩形噴流のスクリーチ周波数を予測する式は平均のセル長さを用いるため，各セル長さがそれぞれ異なる放射状噴流でスクリーチ周波数を予測することは難しい．さらに，矩形噴流，軸対称噴流ともに，振動モード間の周波数のジャンプや，複数のモードが存在するスクリーチ周波数を予測式によって捉えることはできない．放射状噴流のスクリーチ現象を詳細に捉えるため，第 3 衝撃波で記録した圧力履歴を次に示す．

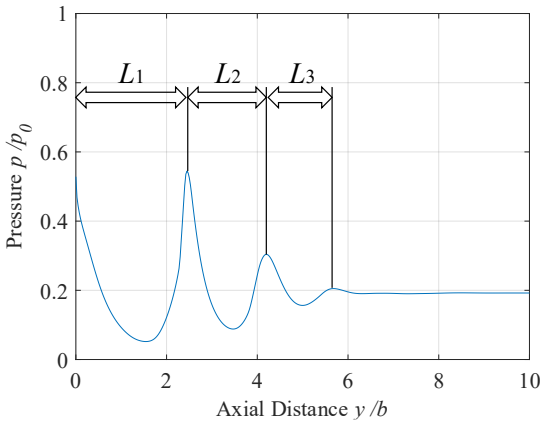


Fig.4 Pressure distribution on y axis

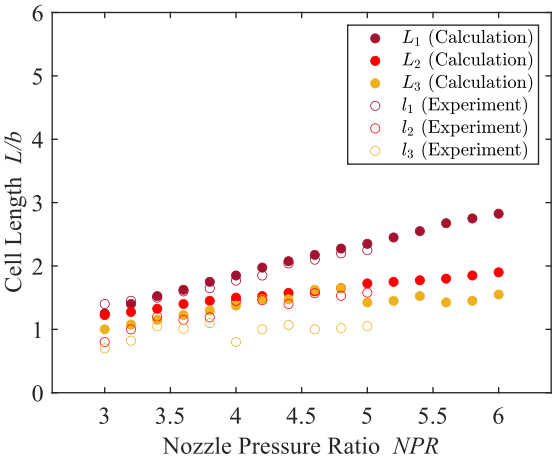


Fig.5 Cell length

3.3　圧力履歴

図 6 および図 7 に第 3 衝撃波における放射状噴流の圧力履歴を示す．縦軸が振幅，横軸が無次元時間である．図 6 は圧力比 4.0，図 7 は圧力比 5.2 である．どちらも圧力の波形が単一の波ではなく，複数の異なる波が混ざり合った合成波となった．しかし，圧力比 4.0 は時間に対して比較的一定の振幅をとるが，圧力比 5.2 では圧力比 4.0 よりも複雑に振幅が変化している．このことから，圧力比 5.2 の第 3 衝撃波の振動は，圧力比 4.0 よりも複数の周波数をもつ合成波で

あると推測できる．この第 3 衝撃波の運動は，第 3 セルが実効的な音源であると考えられている放射状噴流のスクリーチ現象を捉えるうえで重要な現象である．噴流中に発生する衝撃波の非定常な運動現象を，Panda[9][10]はレーザ衝撃波検出法を用いて位相平均値を求めた．その結果，上流で発生した衝撃波は下流へ伝播するにつれて減衰，消滅すると同時に新しい衝撃波が上流で発生するという動きを繰り返していることがわかった．本解析で得られた圧力履歴は，Panda の研究で報告されている衝撃波の発生および消滅の過程を示すものであり，非定常な衝撃波の運動を捉えているといえる．

スクリーチのフィードバック現象において，上流方向へ放射される音響波は，噴流中に発生する第 3 衝撃波と噴流境界を移流する渦が干渉することで発生する．第 3 衝撃波の振動は，セルの伸縮の周期によって決まるため，スクリーチ周波数と同じ周波数で振動していると考えられる．よって，図 7 でみられるように，第 3 衝撃波の圧力波形が複雑に変化していることは，圧力比 5.2 は複数のスクリーチが存在していることを示唆している．しかし，圧力履歴の結果だけでは各スクリーチがどのような挙動を示しているのか判別することは難しいため，次に周波数解析によって得られた結果を示す．

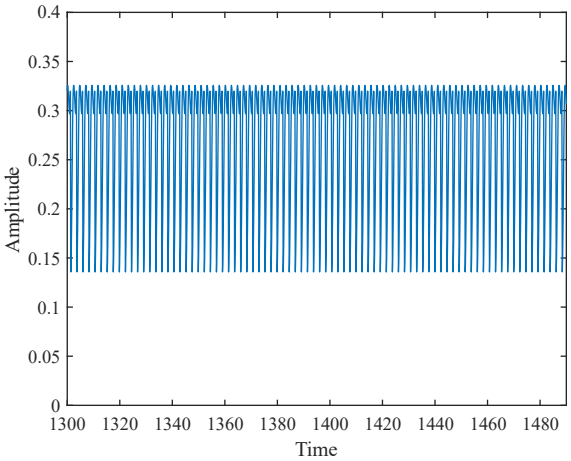


Fig.6 Pressure history (*NPR* = 4.0)

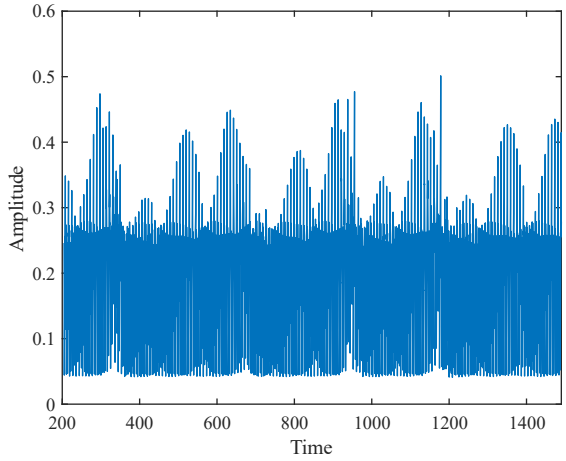


Fig.7 Pressure history (*NPR* = 5.2)

3.4　FFT 解析

図 8 に第 3 衝撃波における放射状噴流のスクリーチ周波数を示す．縦軸がスクリーチ周波数，横軸が圧力比である．f_1は解析上における最も高いスクリーチ周波数であり，f_2，f_3はそれに続く低いスクリーチ周波数である．f_Eは川崎の実験[7]で得られたスクリーチ周波数である．

図 8 では，圧力比が大きくなるほど，スクリーチ周波数が徐々に低くなる傾向がみられた．川崎の実験で得られたスクリーチも同様に，圧力比の増大に従って周波数が減少することがわかる．圧力比 3.0 から圧力比 4.0 までは，単一のスクリーチ周波数成分が出現したが，圧力比 4.2 では単一のスクリーチのほかに低い周波数成分のピークが複数出現し，圧力比 4.4 以降も複数のスクリーチが存在していることがわかる．また，本解析で得られたスクリーチ周波数は，川崎の実験で得られた値よりも 3 kHz 程度高い結果となった．本解析では円筒中心軸に対して軸対称，噴流中心面に対して対称の条件で解析しているため，渦の発生も円周方向に対して同位相かつ噴流中心面に対して対称である．しかし，非対称の振動モードでは噴流中心面に対して左右交互に渦が発生することにより，その周期に合わせて噴流全体が左右に揺れる[6]．また，渦の発生が噴流の円周方向に位相差を伴うため，噴流の三次元的な変動を引き起こす[5]．噴流境界で発達する渦の三次元的な挙動や，先のセル長さで述べたように，実験と解析におけるセル長さに違いが出たことで解析のスクリーチ周波数が高くなったと考えられる．

FFT 解析は信号全体の時間平均的な周波数成分を抽出する手法であるため，圧力比 5.2 のような複数のモードが同時に存在する噴流において，互いのモードがどのように存在しているのかを明らかにすることはできない．次に，連続ウェーブレット変換を用いた周波数解析を示す．

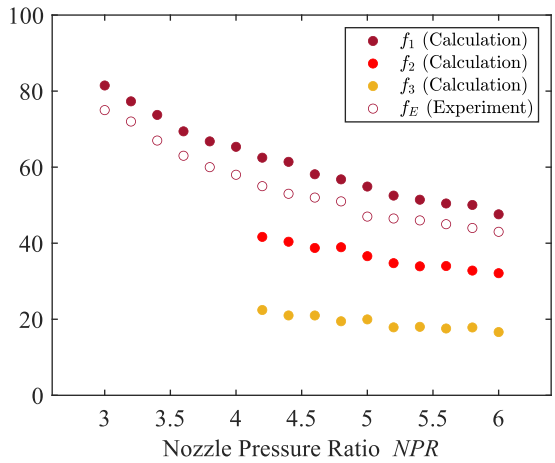


Fig.8 Screech frequency

3.5　連続ウェーブレット解析

図 9 および図 10 に第 3 衝撃波における連続ウェーブレット解析結果を示す．図 9 は放射状噴流，図 10 は二次元噴流である．どちらの図も圧力比 5.2 であり，縦軸が周波数，横軸が無次元時間，カラーバーは周波数成分の強さを示している．図 9 の放射状噴流では，複数の周波数成分が断続的に出現していることが確認できる．それぞれのモードにおける周波数は，FFT 解析によって得られたスクリーチ周波数と一致する．54 kHz のモードが弱まると，37 kHz や 20 kHz のモードが現れ，支配的なモードになることがわかる．54 kHz と他の 2 つのモードは，時間の変化とともに排他的に切り替わるような挙動を示した．その一方で，37 kHz と

20 kHz のモードの強弱は互いに同期しており，共存していることが確認できる．また，図 10 の二次元噴流でも 20 kHz および 10 kHz で断続的なモードが出現し，放射状噴流と同様に，互いのモードが排他的に切り替わっていることが確認できる．

Raman は矩形噴流の実験的研究[11]を通じて，モードステージングにおけるスクリーチの挙動に関して以下の 2 つに分類している．1 つ目は，とあるモードが減衰するにつれて，徐々に別のモードが出現するタイプである．これらのスクリーチモードは互いに共存することもあれば，排他的になることもある．2 つ目は，マッハディスクの出現により，あるモードが消滅し，別のモードに引き継がれるタイプである．1 つ目の現象は，スクリーチの音源が別の場所に移ることに起因し，2 つ目はショックセル構造そのものが変化することに起因する．54 kHz の周波数成分は，図 6 で示されているように，モードステージングより前は単一のモードとして存在していたモードである．圧力比 4.2 以降では，54 kHz のモードのほかに 37 kHz および 20 kHz のモードが現れることから，本解析は Raman が示した 1 つ目のタイプのモードステージングの特徴と一致する．

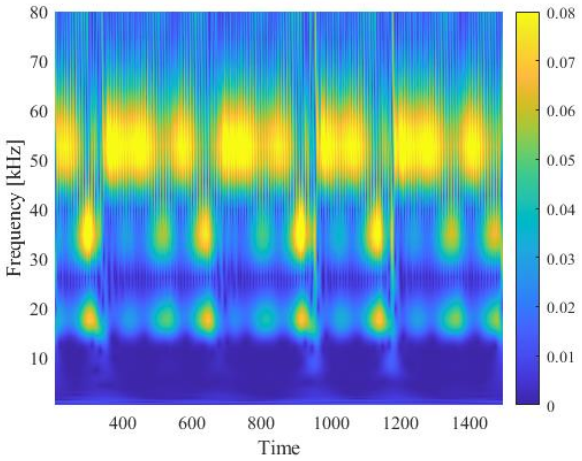


Fig.9 Continuous Wavelet Transform (Radial jet)

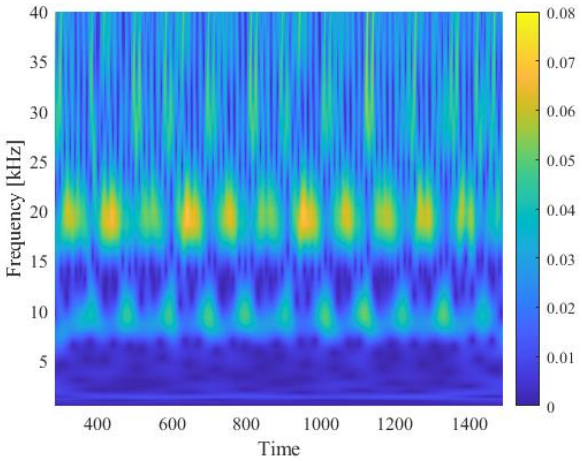


Fig.10 Continuous Wavelet Transform (Two-dimensional jet)

Raman の実験結果において，圧力比 5.2 付近の完全膨張時の噴流マッハ数では非対称モードのみ存在しているが，アスペクト比 10 の矩形ノズルを使用した梶の実験[12]では，非対称モードに加えて対称モードも確認されている．梶の実験では，長軸方向に側壁を取り付けることで，噴流境界を移流する渦が噴流の上下で干渉することを防ぎ，噴流の二次元性を高めている点を考慮すると，本解析における二次元噴流は 2 つのモードが存在するため，梶の実験結果に近いといえる．また，Raman および梶の実験で使用した矩形ノズルのアスペクト比は 4 以上であるため，二次元噴流のショックセル構造と同等とみなすことができる[6]．よって，本解析で得られた二次元噴流は，モードの挙動を定性的に捉えているといえる．放射状噴流は，円筒直径とノズル出口幅の比が$D/b = 10^2$ 以上のオーダーであれば二次元噴流として扱える[6]．つまり，D/bを大きくしていくと，放射状噴流は二次元噴流のモードに近づいていくと考えられる．このことから，放射状噴流で起こるモードステージングは，二次元噴流と同様に，スクリーチの音源が別の場所に移っていると推測できる．モードの波動をより詳細に捉えるため，動的モード分解を用いた調査を行い，抽出したモードの流れ場を次に示す．

3.6　動的モード分解

図 11 に第 3 衝撃波における放射状噴流の圧力履歴を示す．縦軸が振幅，横軸が無次元時間である．図 11 は，図 7 の圧力履歴と同じデータあるが，衝撃波の細かい振動を確認できるように時間軸の範囲を狭めている．矢印で示す通り，3 回の振動で 1 周期のパターンが繰り返されており，区間の時間幅は無次元時間で 8.21 である．この振動のパターンを捉えるために，噴流が下流まで十分達した状態から 8.21 行い，計算内で 100 個の圧力の時系列データを等間隔に取得した．得られた時系列データから，時系列データ間の線形な時間発展作用素を求め，その固有値分解によって動的モードと各モードの周波数を同定した．図 11 の圧力履歴は，矢印の区間では捉えられない低い周波数成分の波が含まれているが，広帯域信号は時間分解能と周波数分解能を両立させることが困難である．このため，全てのモードを抽出することはできていない．よって，次に示す結果は一部の周波数のモードに関するものである．

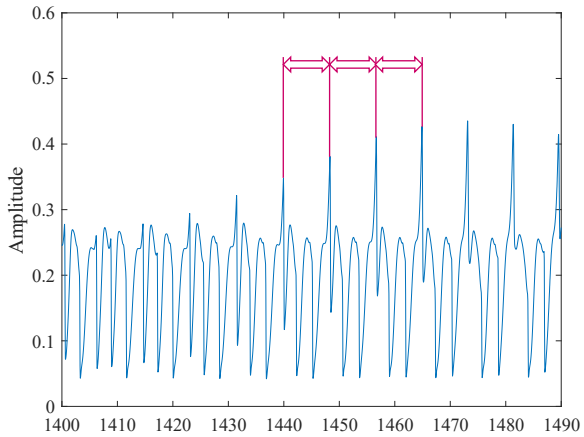
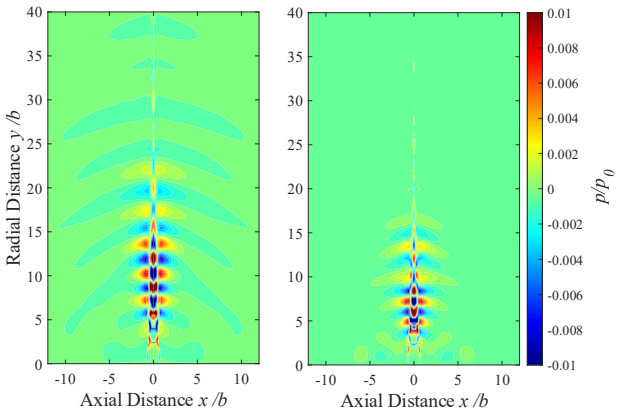


Fig.11 Expanded view of pressure history (*NPR* = 5.2)

図 12 に動的モード分解で抽出されたモードを示す．図 12(a)は 52.7 kHz，図 12(b)は 35.8 kHz のモードである．カラーバーはモードの強さを表している．2 つの抽出されたモードは，FFT 解析や連続ウェーブレット解析で得られたスクリーチ周波数と近い周波数のモードであり，(a)の図は 54 kHz，(b)の図は 37 kHz のスクリーチにそれぞれ対応してい

る．どちらのモードも上流と下流それぞれの方向に波動が放射されているが, 52.7 kHz のモードの波動は，波動が下流に向かって遠くまで伝播している様子が確認できる．これは, 52.7 kHz のスクリーチが下流に強い指向性をもつことを示している．一方で, 35.8 kHz のモードは，波動が噴流境界近傍の渦が移流する領域に限定されており，遠方に波動が放射されている様子は確認できない．このことから，動的モード分解によって抽出された各モードは，それぞれが異なる指向性および伝播の特性をもつことがわかる．

二次元噴流において，梶の実験[12]では長軸方向に取り付けた側壁で圧力測定を行い，各点における圧力信号の振幅と位相を補捉した．その結果，スクリーチは下流に強い指向性があり，上流にも指向性が存在することを示した．この梶の実験結果は，二次元噴流の非対称モードについて述べたものであり，本解析における 52.7 kHz のモードの波動の指向性と伝播の特性と一致する．このことから，放射状噴流における 3 つのスクリーチのうち，一番高い周波数をもつモードは二次元噴流の非対称モードの指向性や伝播の特性と近いことわかる．



(a) 52.7 kHz　　(b) 35.8 kHz

Fig.12 Modes extracted from Dynamic Mode Decomposition

4.　結論

放射状噴流の解析において，圧力比 4.2 以降で複数のスクリーチが出現することを確認した．複数のスクリーチが存在するとき，周波数が一番高いモードとそれ以外のモードでは，互いに排他的，断続的に切り替わった．その一方で，周波数が一番高いモード以外の 2 つのモードは，互いに同期し共存するような挙動を示した．動的モード分解で抽出された 2 つのモードは，波動の指向性および伝播がそれぞれ異なる特性をもつことを示した．周波数が一番高いスクリーチは，二次元噴流で確認された非対称モードと似た指向性や伝播の特性を示した．

参考文献

(1) 宇野義幸，岡本康寛，廣瀬和典，川口茂孝，窪田真一郎，三柳直毅，“YAG レーザを用いた精密切断加工におけるアシストガスの供給法に関する研究”，精密工学会誌論文集，(1999), Vol.65，No.10，pp.1471-1475.

(2) 荒谷眞一，小島英則，高山和喜，” 熱強化ガラス製作用ノズルからの衝撃波発生と自由噴流に関する研究”，日本機械学会論文集（B 編），Vol. 60, No. 590, (1995), pp.3706-3711.

(3) Powell, A., “On the Edgetone”, The Journal of Acoustical Society of America, volume 33, Issue 4, (1961), pp.395-409.

(4) Powell, A., “On the Mechanism of Choked Jet Noise”, Proceedings of the Physical Society of London, B66, (1953), pp.1039-1056

(5) Yee. H. C., "High Resolution Shock capturing Schemes for Inviscid and Viscous Hypersonic Flows", journal of Sound and Vibration Vol. 121, No.1, (1988), pp.135-147.

(6) 遠藤正樹，榊原洋子，岩本順二郎，“放射状不足膨張噴流の時間平均的なセル形状に関する研究”，日本機械学会論文集（B 編）, 72 巻 720 号, (2006), pp.1901-1906.

(7) C. K. W. Tam., “The Shock-cell Structures and Screech Tone Frequencies of Rectangular and Non-axisymmetric Supersonic Jets”, Journal of Sound and Vibration, Vol.121, No.1, (1988), pp.135-147.

(8) 川崎公一，遠藤正樹，鈴木宏昌，榊原洋子，“不足膨張状態の放射状噴流と矩形噴流における構造と放射音”，日本機械学会論文集, Vol.84，No.866, (2018)，pp.1-83.

(9) Panda, J., “Shock oscillation in underexpanded screeching jets”, Journal of Fluid Mechanics, vol.363, pp.173-pp.198, (1997)

(10) Panda, J., “Measurement of shock oscillation in under-expanded supersonic jets”, AIAA Paper 95-2145, (1995)

(11) Raman, G., “Screech tones from rectangular jets with spanwise oblique shock-cell structure” Journal of Fluid Mechanics, vol.330, (1997), pp.141-pp.168.

(12) 梶 昭次郎, “超音速ジェットスクリーチについて”，日本流体力学学会誌「ながれ」, 20 巻 3 号, (2001), pp.204-212