

電磁波問題の解析手法について

On The Analytical Techniques For Electromagnetic Waves

○木下 照弘 (櫛科学技術研究所, 東京工芸大学) 藤田 明希 (櫛科学技術研究所)

Teruhiro KINOSHITA, Science & Technology Ins., Co., Tokyo Polytechnic University

Aki FUJITA, Science & Technology Ins., Co., 3-5-4-5F Kouji-machi, Chiyoda, Tokyo 102-0083

1. はじめに

電磁波問題への取り組みとしては、散乱体の形状や媒質の物性に応じた個々の問題を微分方程式の境界値問題として取り扱う方法が長い期間にわたり研究・開発されてきたが、近年のコンピュータの飛躍的な発展に伴い、従来法では適応が困難であった問題について数値的に結果を得る方法として有限要素法、モーメント法、FDTD法などが開発・改良されてきている。これらの方法を活用することにより電磁界シミュレーションは実用的な段階に達している。本稿では幾つかの電磁波解析の方法を取り上げて紹介する。

電磁波問題では、対象とするモデルに対してマクスウェルの方程式(1)と媒質の構成方程式(2)を適切な境界条件のもとで解くことになる。

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1d)$$

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (2b)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (2c)$$

ここで、 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ と t は、それぞれ、空間の座標と時間を表し、

E [V/m]	電界	D [C/m ²]	電束密度
H [A/m]	磁界	B [Wb/m ²]	磁束密度
J [A/m ²]	電流密度	ρ [C/m ³]	電荷密度
ϵ [F/m]	誘電率	μ [H/m]	透磁率
σ [S/m]	導電率		

を表す。式(1a), (1b)はそれぞれ、ファラデーの法則、および、アンペア・マクスウェルの法則を数式化したものである。式(1c), (1d)はガウスの電気力線(電束)、および、磁力線(磁束)の保存法則である。

式(1), (2)を電界について整理すると、波動方程式

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (3)$$

が得られる。式(3)を解くことで、電流を励振源とする電界分布を知ることができる。多くの解析手法では電磁界の時間変化は $\exp[j\omega t]$ として $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ と置き換えて周波数領域での問題に簡単化する。ここで、 $j (= \sqrt{-1})$ は虚数単位を表す。

2. 境界条件と放射条件および端点条件

電磁波は波動であるから、異なる媒質の境界面で散乱、回折が生じる。その際の界の連続性は方程式(1), (2)に対する境界条件となる：

連続条件：媒質1の電磁界を $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ 、媒質2の電磁界を

$\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ と表すと、境界面上で

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0 \quad (4a)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0 \quad (4b)$$

が成立する。ここで、 \mathbf{n} は境界面での法線ベクトルである。媒質2が完全導体の場合は、導体表面に面電流 \mathbf{J}_s が生じ、内部では電磁界が0となり、境界条件は次式になる。

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = 0 \quad (4a)$$

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H}_1 = \mathbf{J}_s \quad (4b)$$

放射条件 電磁界の成分の1つを Ψ と表すとき、波源や障害物(散乱体)から十分遠方において

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} + jk\Psi \right) = 0 \quad (5)$$

を満足する必要がある。式(4)はゾンマーフェルトの(外向)放射条件として知られている。ここで、 $k (= \omega\sqrt{\mu\epsilon})$ は媒質の伝搬定数と呼ばれている。

端点条件 散乱体がエッジ(角)を持つとき、波動方程式(3)の解が物理的に有効な電磁界であるには、エッジ近傍でエネルギーが発散しないための端点条件

$$\int_V (\epsilon |\mathbf{E}|^2 + \mu |\mathbf{H}|^2) dv \rightarrow 0 \quad (6a)$$

を満たす必要がある。2次元エッジに対する端点条件を式(1), (2)に適用すると電磁界のエッジに沿った成分は有界であるもののエッジと垂直な成分 E_\perp, H_\perp は式(6)のように発散することが示されている^[1]。

$$E_\perp = O(\rho^{-1+\tau}), \quad H_\perp = O(\rho^{-1+\tau}) \quad \rho \rightarrow 0 \quad (6b)$$

ここで、導体エッジの開き角が Ω である場合、 $\tau = \pi/\Omega$ と表される。 $\Omega = 2\pi$ のknife-edgeでは電磁界のエッジと直交する成分は $O(\rho^{-1/2})$ で発散する。

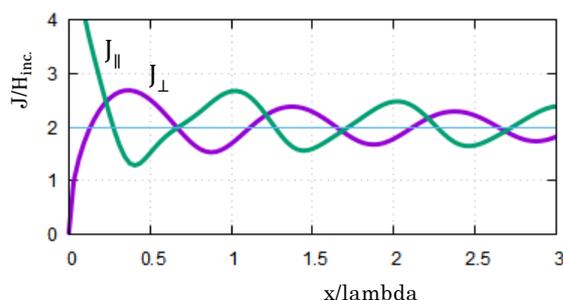


Fig.1 Current distributions on a half-sheet

半無限導体平板(開き角 2π)に平面波が垂直に入射した場合に導体板上に生じる電流分布を Fig.1 に示す。 J_\parallel はエッジと平行な電流成分、 J_\perp はエッジに垂直な電流成分を表す。境界条件より $J_\parallel = H_\perp$ 、 $J_\perp = H_\parallel$ である。

Fig.1 の縦軸は導体板上の面電流密度[A/m]をエッジへ入

射する磁界 $H_{inc.}[A/m]$ で規格化している．横軸はエッジからの距離を波長で規格化した値である． $J_{||}, J_{\perp}$ ともに、ほぼ、波長と同じ周期で振動している．また、垂直成分 J_{\perp} はエッジで0になり、平行成分 $J_{||}$ はエッジ近傍($0 < x \ll \lambda$)で発散することがわかる．(λ : 波長)

3. 固有関数による展開

波動方程式(3)が変数分離可能な座標系と一致する形状の散乱体や導波路に対しては固有関数(モード関数)による展開が有効である．直交座標系(Cartesian coordinate system)では三角関数および指数関数, 円筒座標系ではベッセル関数, ノイマン関数, ハンケル関数, 三角関数および指数関数, 球座標系ではルジャンドル関数, 球ベッセル関数, 三角関数が固有関数となる．

・線電流源と円筒導体^[2]

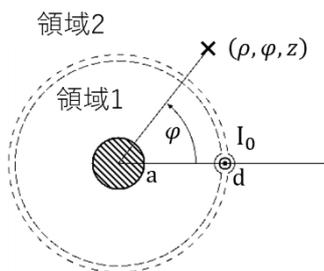


Fig.2 a circular cylinder and a line source

半径 a の円筒導体に対して、中心軸を z 軸とする円筒座標系 (ρ, φ, z) を Fig.3 のように設定する． $\rho = d, \varphi = 0$ に z 軸と平行に置かれた z 軸方向に一樣な電流源 I_0 からの放射界を求める．このために、空間を

領域1: $a < \rho < d$

領域2: $\rho > d$

に分けると、それぞれの

領域で、円筒座標系での波動方程式の解を用いて電磁界を次のように展開することができる．

$$E_z(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n J_n(k\rho) + B_n H_n^{(2)}(k\rho)\} \cos n\varphi \quad (a \leq \rho < d) \quad (7a)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n H_n^{(2)}(k\rho) \cos n\varphi \quad (\rho > d) \quad (7b)$$

$$H_\varphi(\rho, \varphi) = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \quad (7c)$$

ここで、 A_n, B_n, C_n は展開係数であり、境界条件により決定される．なお、 $J_n(k\rho), H_n^{(2)}(k\rho)$ は、それぞれ、 $k\rho$ を引数とする n 次のベッセル関数、および、 n 次の第2種ハンケル関数と呼ばれる波動方程式を満足する関数である．

円筒導体表面($\rho = a$)では電界の接線成分は0であるから、

式(7a)より直ちに、 $B_n = -\{J_n(ka)/H_n^{(2)}(ka)\}A_n$ が求まる．

領域1と2の境界($\rho = d$)では、電流源が存在する分だけの不連続が磁界に生じる：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{H_\varphi(d+0) - H_\varphi(d-0)\} \cos n\varphi = \frac{I_0}{d} \delta(\varphi) \quad (8)$$

ここで、 $\delta(\varphi)$ はディラックのデルタ関数である．式(8)の両辺に $\cos n\varphi$ を掛けて $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ で定積分すると、三角関数の直交性

$$\begin{aligned} (\cos n\varphi, \cos m\varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos n\varphi \cos m\varphi d\varphi \\ &= \begin{cases} 2\pi, & n = m = 0 \\ \pi, & n = m \neq 0 \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad (9) \end{aligned}$$

を利用して展開係数に対する条件式が得られる． $\rho = d$ での

電界 $E_z(d \pm 0, \varphi)$ の連続条件とあわせて展開係数を決定することができる．次式に結果のみを示す．

$$E_z(\rho, \varphi) = \frac{1}{4} \omega\mu I_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ J_n(k\rho_{<}) - \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(k\rho_{<}) \right\} \times H_n^{(2)}(k\rho_{>}) \cos n\varphi \quad (10a)$$

$$= \frac{1}{4} \omega\mu I_0 \left\{ H_0^{(2)} \left(k\sqrt{\rho^2 + d^2 - 2d\rho \cos \varphi} \right) - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{J_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} H_n^{(2)}(kd) H_n^{(2)}(k\rho) \cos n\varphi \right\} \quad (10b)$$

ただし、 ρ と d の大きい方と $\rho_{>}$ 、小さい方を $\rho_{<}$ と表記している．また、 $\epsilon_n = 1 (n = 0), = 2 (n > 0)$ を表す．式(10a)右辺第1項は円筒導体と無関係であり、観測点 (ρ, φ) と波源の距離に依存することから波源からの直接の放射波を表し、右辺第2項は円筒による散乱界を表す．

・二分岐導波路^[3]

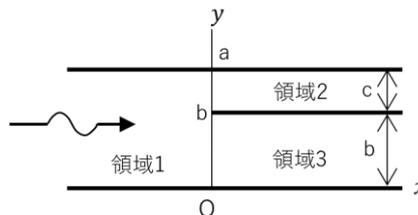


Fig.3 The bifurcated waveguide

次に図3に示す二分岐平行平板導波路による基本モードの伝送に伴う電磁界分布のモード整合を例示す． $y = 0$ と $y = a$ の x - z 平面に置かれた2枚の無限導体

平板に挟まれた空間に、 $y = b, x > 0$ に半無限導体平板が置かれている．図の左から x 軸に沿って正方向に入射した電磁波が $x = 0$ で $0 < y < b$ と $b < y < a$ の2領域に分岐して伝搬し、一部は x の負方向へ反射する．入射する電磁波は電界が z 成分のみを持ち次式で表される z 方向に一樣な基本モードとする．

$$E_z^{inc.}(x, y) = E_0 e^{-j\beta_{a1}x} \sin \frac{\pi}{a} y \quad (11)$$

z 軸方向には一樣で変化がないことから各領域での電磁界は、波動方程式の解を用いて次のように展開することができる．

$$E_z(x, y) = E_0 e^{-j\beta_{a1}x} \sin \frac{\pi}{a} y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{j\beta_{an}x} \sin \frac{n\pi}{a} y, \quad \begin{matrix} x < 0, \\ 0 < y < a \end{matrix} \quad (12a)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-j\beta_{bn}x} \sin \frac{n\pi}{b} y, \quad \begin{matrix} x > 0, \\ 0 < y < b \end{matrix} \quad (12b)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-j\beta_{cn}x} \sin \frac{n\pi}{c} (a - y), \quad \begin{matrix} x > 0, \\ b < y < a \end{matrix} \quad (12c)$$

$$H_y(x, y) = \frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} \quad (12d)$$

ここで、 A_n, B_n, C_n は各領域でのモード関数(波動方程式の解)の展開係数であり、

$$\beta_{pn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{p}\right)^2}, \quad p = a, b, c \quad (13)$$

は、それぞれの領域での各モード(姿態)の伝送方向(x 方向)の位相変化を表す．

分割した領域の境界面($x = 0$)で電磁界が連続になるよう展開係数を決定する. $x = 0$ における電界 E_z の連続条件

$$E_0 \sin \frac{\pi}{a} y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{a} y = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi}{b} y & 0 < y < b \\ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{c} (a - y) & b < y < a \end{cases} \quad (14)$$

の両辺に $\sin(m\pi y/b)$ を掛けて $0 \leq y \leq b$ で定積分すれば

$$B_m = \left\langle \frac{m}{b}, \frac{1}{a} \right\rangle E_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle \frac{m}{b}, \frac{n}{a} \right\rangle A_n \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

が得られる. ここで,

$$\left\langle \frac{m}{b}, \frac{n}{a} \right\rangle = \frac{b}{2} \int_0^b \sin \left(\frac{m\pi}{b} y \right) \sin \left(\frac{n\pi}{a} y \right) dy \quad (16)$$

である. 同様に, $b \leq y \leq a$ で定積分することで, C_m を $\{A_n\}$ の線形和で表すことができる.

磁界 H_y の連続条件からも同様の操作により, B_m, C_m を $\{A_n\}$ の線形和で表すことができる. これらから, B_m, C_m を消去すると展開係数 $\{A_n\}$ についてのマトリクス方程式が得られる.

さて, 数値計算により展開係数を求める場合, 係数を有限個で打ち切る必要がある, B_n を $n = 1, 2, 3, \dots, N_b$ で打ち切って消去すると, $\{A_n\}$ について N_b 個の一次方程式が得られる. また, C_n を N_c までで打ち切ると, N_c 個の方程式が得られるので $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{N_b+N_c}$ についてのマトリクス方程式として数値的に解くことができるが, 打ち切り項数(N_b, N_c)の選び方に自由度が生じる.

打ち切り項数の比

$$r = \frac{N_c}{N_b} \quad (17)$$

をパラメータとして, 数値計算による結果をFig.4に示す. $b = 0.95\lambda, c = 0.55\lambda$ の場合について, 展開係数 $|A_n|$ の値を対数目盛でプロットし

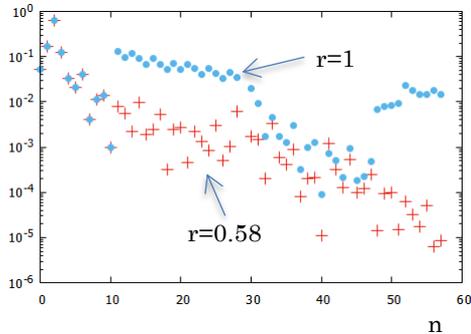


Fig.4 Intensity of the expansion coefficients $|A_n|$

ている. 導波路幅の比とほぼ等しい $r = 0.58 (= c/b)$ の場合(+)と比較して $r = 1$ の場合(\cdot)は $|A_n|$ の収束が遅く不安定であることがわかる. $r = 0.50$ の場合にはエッジ近傍での電界 $E_z(-0, b)$ が端点条件を満足していないことが確かめられる. このように, エッジが含まれる電磁界の解析では解の収束に注意する必要がある.

4. 高周波近似解法^{[4],[5],[6]}

対象とする散乱体のサイズに比べて波長が短くなると電磁波は直進性, 反射, 屈折, 回折の局所性など光の持つ ray としての性質を顕著に示すようになる.

現象の局所性に着目し, 散乱体の局所形状に適合する散乱・回折電磁波を先に述べた固有関数などによる電磁界で表現することで, 複雑な形状に対する電磁波問題を解決することができる.

局所形状を表現するものとしては, 半無限平板によるエ

ッジ回折, 円筒や球による回り込みなどがある. 基本形状の散乱体による電磁波問題は規範問題と呼ばれている.

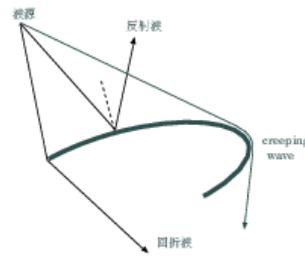


Fig.5 scatter and ray-path

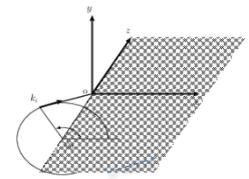


Fig.6 Diffraction by a half-sheet

Fig.6に示す半無限導体平板による電磁界問題ではエッジに沿った方向のフーリエ変換により得られた解の逆変換積分に高周波近似を適用し, 反射界, エッジ回折界を取り出す. 近似の違いにより幾何光学的回折理論(GTD, Geometrical Theory of Diffraction), UTD(Uniform Theory of Diffraction), 等価端部電磁流源法(Equivalent Edge Current Method)などが提案されている. 円筒問題では, 式(10b)右辺第2項の無限級数を複素積分に変換した後, 分母の零点まわりの留数計算を高周波近似して creeping wave と呼ばれる滑らかな曲面に沿って回り込む放射モードが導出されている.

これらを組み合わせて幾何学的に電磁界を構成する際にキルヒホッフの回折積分式(Fresnel-Kirchhoff diffraction formula), あるいは, グリーン定理が有用である^[7].

与えられた解析領域内部に電流源 J と散乱体 V が置かれたときの電界 E および磁界 H を求める問題を考える. 解析領域から電流源と散乱体を取り除いて, 領域内の任意の場所に単位強さの微小電流源 1 を置いたときの電磁界分布を e, h と表す. このとき, マクスウェルの方程式とベクトル解析の公式より, 次の関係式が成立する.

$$\begin{aligned} E(r) \cdot 1 &= e(r, r_0) \cdot J(r_0) \\ &+ \iint_S \{e(r, r') \times H(r') + h(r, r') \times E(r')\}_n dS' \quad (18a) \end{aligned}$$

これはグリーン関数の定理と呼ばれている. ここで, 積分は散乱体表面 S での面積分であり, n は面 S での外側を向いた法線成分を表す. 電磁界 $e(r, r'), h(r, r')$ はグリーン関数と呼ばれている. 微小電流源 1 の向きにも依存するので, グリーン関数はテンソル量である.

特に, 散乱体が完全導体である場合は, 境界条件より散乱体表面で電界の接線成分は 0 であり, 磁界の接線成分は表面電流を用いて表すことができるので, 次式が得られる.

$$E(r) \cdot 1 = e(r, r_0) \cdot J(r_0) - \iint_S e(r, r') \cdot J(r') dS' \quad (18b)$$

式(18b)より, 解析領域内の電界は, 電流源からの放射界(右辺第1項)と散乱体表面に生じる誘導電流からの再放射界(右辺第2項)との和で表されることがわかる. 散乱体のサイズや波源, 観測点からの距離に比べて波長が十分に短い場合, 電磁界は伝搬による位相の遅れと残りの部分に分けて表現することができる. Fig.7に示すような散

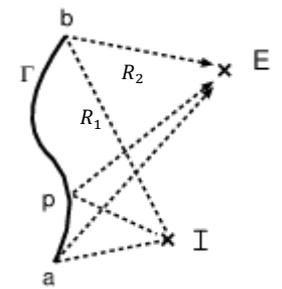


Fig.7 Ray-path for diffracted waves

乱体に対して、式(18b)右辺第2項は、被積分関数部分を電磁波の行路長による位相の遅れを分けて式(19)に書き換えることができる。

$$\iint_{\Gamma} \mathbf{e}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-jkR_2} \cdot \mathbf{J}_a(\mathbf{r}') e^{-jkR_1} dS' = \iint_{\Gamma} \mathbf{e}_a(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{J}_a(\mathbf{r}') e^{-jk(R_1+R_2)} dS' \quad (19)$$

散乱体表面 Γ での行路長の違いに伴う式(19)の被積分関数の様子を Fig.8 に示す。

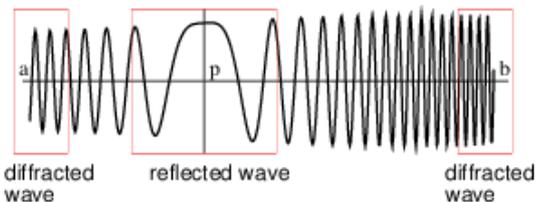


Fig.8 Intensity of field reflected on the scatterer

電界は Fig.8 を定積分して得られるが、行路長の変化が穏やかになる P 点付近を除いて、ほとんどの区間で激しく振動しており、積分値は 0 に近い値になる。このため、積分値は、ほぼ P 点付近での値で決まる。これは P を反射点とする反射波に対応する。この他には、僅かではあるが、積分領域の端 a, b 点近傍での値が積分値に影響する。この端部での積分がエッジ回折界に相当する。

5. FILT(高速逆ラプラス変換)法^[8]

周波数領域において単位大きさの励振源から生じる電界を $E(\mathbf{r}; \omega)$ と表すと、励振源をパルス信号 $f(t)$ としたときの電界の時間応答のラプラス変換は $E(\mathbf{r}, -js)F(s)$ と表される。ここで、 $F(s)$ は $f(t)$ のラプラス変換

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (20)$$

である。 $E(\mathbf{r}, -js)F(s)$ を逆ラプラス変換することで、電界の時間応答を求めることができる。つまり、周波数領域での電界において $j\omega \rightarrow s$ と置き換えたものを伝達関数として時間応答を求めることができる。逆変換により時間応答を求めようとするとき、多くの場合では、 s の有理式に対する逆変換公式が利用されるが、電磁界の伝達関数は平方根などの無理関数を含む場合が一般的であり、逆変換公式にのみ頼った逆変換が不可能である。このため、数値計算が用いられる。

FILT(Fast Inversion of Laplace Transform, 高速逆ラプラス変換)法は、 $Y(s)$ の逆ラプラス変換

$$y(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) e^{st} ds \quad (21)$$

を直接に数値計算するのではなく、適当な正定数 a を定めて、次の近似式を数値計算することで、 $y(t)$ の近似値を求める。

$$\bar{y}(t) = y(t) + e^{-2a}y(3t) + e^{-4a}y(5t) + e^{-6a}y(7t) + \dots \quad (22a)$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2na} Y(s) e^{(2n+1)st} ds$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) e^{st} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n(a-st)} \right\} ds$$

と変形できる。 $\text{Re}[s] < a/t$ において右辺の無限級数は収束

して、

$$\bar{y}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) \frac{e^{st}}{1 - e^{-2(a-st)}} ds$$

さらに、 $t > 0$ であるから、 s についての複素積分は右半平面で閉じることができて、1位の極

$$s = \frac{a + n\pi j}{t}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

での留数計算により次式が求まる。

$$\bar{y}(t) = \frac{e^a}{2t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n Y\left(\frac{a + n\pi j}{t}\right) \quad (22b)$$

同様に、近似式(22d)により数値計算することもできる。

$$y(t) \approx \bar{y}(t) - e^{-2a}y(3t) + e^{-4a}y(5t) - e^{-6a}y(7t) + \dots \quad (22c)$$

$$= \frac{je^a}{2t} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left\{ Y\left(\frac{2a + (2n+1)\pi j}{2t}\right) - Y\left(\frac{2a - (2n+1)\pi j}{2t}\right) \right\}$$

励振源の時間変化が階段状である場合に、信号 $F(s)$ は

$$F(s) = O(s^{-1}), \quad |s| \gg 1$$

であるため式(22b), (22d)中の無限級数は非常に収束が遅い、このため FILT では交項級数の収束の加速法として知られ

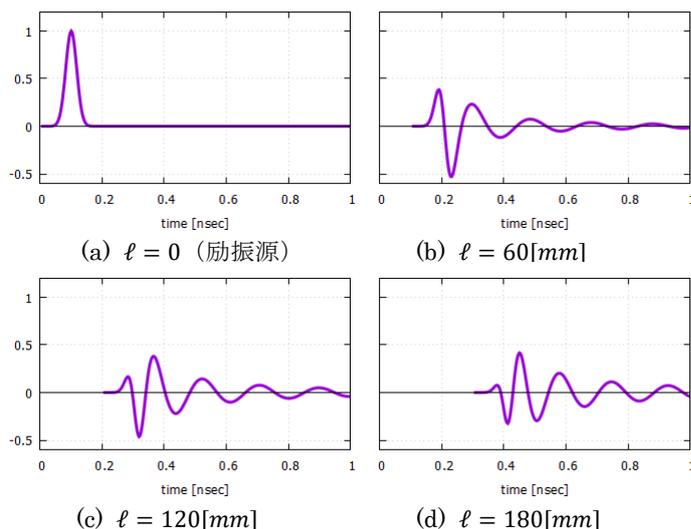


Fig.9 矩形導波管中でのガウシアンパルス時間応答しているオイラー変換(オイラーの総和法)が併用される。

例として矩形導波管において、ガウシアンパルスにより励振した電界の時間応答の計算結果を示す。

励振電界は式(23a)とする。導波管の伝達関数 $G(s)$ は式(23b)で表される。ここで、 l は励振源から観測点までの距離、 w は導波管幅、 c は光速である。

$$E^{inc.}(x, t) = \exp\left[-\left\{4\left(\frac{t}{T_0} - 1\right)\right\}^2\right] e^{-(t/T_0 - 5)^2} \sin\frac{\pi}{w}x \quad (23a)$$

$$G(s) = \exp\left[-\ell \sqrt{\left(\frac{s}{c}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{w}\right)^2}\right] \quad (23b)$$

$w=30[\text{mm}]$, $T_0=0.1[\text{nsec}]$ としたときの $x=w/2$ での FILT による数値計算結果を Fig.9 に示す。(a) は励振源でのガウシアンパルス波形である。伝達関数式(23b)が周波数分散性を持つため、観測点が励振源から離れるとパルス波形が乱れる。なお、式(22)の計算に当たっては $a=5$ とした。

6. モーメント法^{[4],[9],[10]}

固有関数を用いる解析手法は矩形, 円筒, 球などの形状に限られ, 汎用性に欠ける. 任意形状の媒質や散乱体に適用可能な周波数領域での電磁波問題の数値解法として有限要素法(FEM, Boundary Element Method)と並んでモーメント法(MoM, Method of Moment)が知られおり, 汎用的な電磁界シミュレーションに利用されている.

モーメント法は境界要素法(BEM, Boundary Element Method)とも呼ばれ, グリーンの定理に基づいた積分方程式の数値解法である.

散乱体が完全導体である場合, 式(18b)より, 解析領域内の電界は, 電流波源からの放射界(右辺第1項)と散乱体表面に生じる誘導電流からの再放射界(右辺第2項)との和で表される.

ここで, 観測点 r を散乱体表面 S に取ると電界の接線成分は 0 であるから, グリーン関数を解析的に求めることができれば, 式(18b)は散乱体表面での電流を未知関数とする積分方程式となる. 散乱体表面 S を細分割し, その要素点のまわりで区分的な関数(展開関数, 基底関数)を用いて展開して, 試験関数と呼ばれる区分的な関数を掛けて積分することで展開係数についての線形一次方程式(マトリクス方程式)を得る. 数値計算によりマトリクス方程式を解くことで展開係数を求めて電流分布を得ることができる. 解の安定性から展開関数と重み関数には同じ区分的な関数を用いられることがほとんどである(ガラーキン法). なお, 電流分布の展開関数である区分的な関数を決定する際には電荷の保存法則を考慮する必要がある.

モーメント法で得られるマトリクスは密行列であるため, マトリクス方程式を数値計算する際の計算量は要素点(展開係数)の3乗に比例する. 面積分を近似する要素点は分割幅の2乗に逆比例することから, モーメント法での計算量は分割幅の5行に逆比例する.

一般的に, 無限遠を含む開放領域での解析では, 自由空間でのグリーン関数を用いられる. また, 導体板上の薄い誘電体層表面に導線を配置するマイクロストリップ線路(MSL)の解析では, 十分に大きな完全導体で囲まれた立方体空洞内部でのグリーン関数を用いられる^[11].

7. FDTD(有限差分時間領域)法^{[10],[12],[13]}

FDTD法(Finite-Difference Time-Domain Method, 有限差分時間領域法)はこれまでに述べた解法と異なり直接に電磁界の時間応答を求める数値解法である.(時間領域法)

FDTD法では解析空間を格子状に細分割し, 格子で区切られた各セルの代表点での電磁界を用いてマクスウェルの方程式を直接に差分近似する, このため, 計算アルゴリズムが単純であり, コンピュータによる並列計算に適した解法である. さらに, 特殊な関数の利用を必要とせず, 損失や誘電率, あるいは, 透磁率を持つ任意形状の分散性や非等方性の物質を含む問題に対しても適用可能である. また, ある周波数帯域での特性を解析する際に, 周波数領域での解法では周波数を変えて計算を繰り返す必要があるのに対して, FDTD法は時間領域で解法であるから, 時間応答を一度計算すれば, 離散フーリエ変換することで周波数特性を得ることができる.

式(1)から式(2)を用いて電束密度 \mathbf{D} と磁束密度 \mathbf{B} を消去したマクスウェルの方程式について, 時間および空間での微分を空間に多数配置された代表点での電界 \mathbf{E} と磁界 \mathbf{H} の差分で近似する.

時間差分 時間を $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$ と一定の時間幅 Δt で区切

り時間微分を中心差分により近似する. 式(1a)第2項を $t = n\Delta t$ での中心差分で近似すると

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, n\Delta t)$$

$$+\mu \frac{\mathbf{H}(\mathbf{r}, (n + \frac{1}{2})\Delta t) - \mathbf{H}(\mathbf{r}, (n - \frac{1}{2})\Delta t)}{\Delta t} = 0$$

となり, 次式に変形できる.

$$\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) - \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}^n(\mathbf{r}) \quad (25a)$$

ここで, 簡単のために

$$\mathbf{H}^{n\pm\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}(\mathbf{r}, (n \pm \frac{1}{2})\Delta t), \quad \mathbf{E}^n(\mathbf{r}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, n\Delta t)$$

と表記している.

式(1b)については $t = (n + 1/2)\Delta t$ で差分近似する. 無損失($\sigma = 0$)の場合には上と同様にして次式が得られる.

$$\mathbf{E}^{n+1}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^n(\mathbf{r}) + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}(\mathbf{r}) \quad (25b)$$

式(25a)を用いて, 時間 $(n - \frac{1}{2})\Delta t$ での磁界と $n\Delta t$ での電界から $(n + \frac{1}{2})\Delta t$ での磁界を算出することができる. また, 式(25b)からは時間 $n\Delta t$ での電界と $(n + \frac{1}{2})\Delta t$ での電界から $(n + 1)\Delta t$ での磁界を算出することができる. これを交互に繰り返すこと時間的変化を求めることができる. $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}), \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbf{r})$ を初期値とする電磁界の時間変化を1ステップ毎に時間を追って数値計算にすることで時間応答が得られる.

媒質が損失を持つ場合は

$$\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \rightarrow \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$$

と置き換えて導電率 σ を考慮する必要がある. このときは

$$\sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, (n + \frac{1}{2})\Delta t) = \frac{\sigma}{2} \{\mathbf{E}^{n+1}(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^n(\mathbf{r})\}$$

と平均値を使用する.

空間差分 xyz座標系の座標軸と平行に解析空間を Yec 格子と呼ばれる3次元格子で区切る. 格子で区切られた各立方体をセルと呼び, セルの各辺および面中央に電磁界成分の代表点を設定することで電磁界の空間分布を離散化する.(Fig.10)

ベクトルの回転 ($\nabla \times \mathbf{E}, \nabla \times \mathbf{H}$) は空間座標での微分であるから, 隣り合う代表点での値の差分で近似することができる.

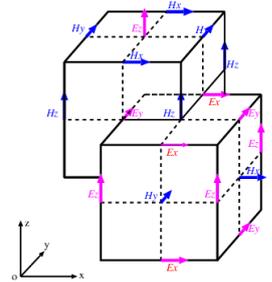


Fig.10 Cells and field component

散乱体の表現法 解析空間を細かく分割した各セルにその座標位置での媒質の特性値である誘電率 ε , 透磁率 μ , 導電率 σ を持たせ, 隣り合うセルが接する面上で電磁界の連続条件を適用する. したがって, 散乱体の形状は立方体をしたセルの集まりとして近似することになる.

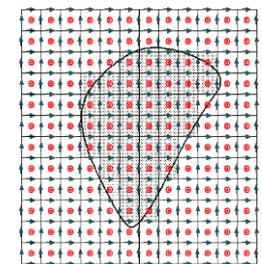


Fig.11 FDTD modeling

CFL 条件(Courant-Friedrichs-Lewy Condition) シミュレーションにおいて、時間ステップで進む波動の距離(速度×時間幅)が空間の分割幅を超えると不安定な、現実の現象とは異なる応答となり、ついには発散してしまうことが知られている。空間の分割幅を細かくすると、それに応じて時間分割幅も小さくする必要がある。

分散性媒質の取り扱い 媒質定数が周波数に依存する分散性媒質では、構成方程式(2)が時間に関する微分方程式になる。この場合の開放として RC-FDTD (Recursive Convolution FDTD)法が知られている。

ドルーデ・モデルにより表現される分散性物質の場合を例示すると、複素誘電率は

$$\epsilon = \frac{\omega_p^2}{j\omega(\nu_c + j\omega)} \epsilon_0 \quad (26a)$$

と表される。ここで、 ω_p [rad/sec]はプラズマ角周波数、 ν_c [rad/sec]は衝突周波数、 ϵ_0 は真空の誘電率である。このときの電界と電束密度の関係は

$$\mathbf{D} = \frac{\epsilon_0}{\omega_p^2} \left\{ \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nu_c \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\} \quad (26b)$$

であり、マクスウェルの方程式(1)と式(26b)を連携して RD-FDTD 法により時間応答の数値解を得ることが出来る。この他に、物質中の電子振動を古典力学で表現したローレンツ・モデルや誘電緩和の説明に用いられるデバイ・モデルが利用される。

このように、FDTD 法では誘電率が周波数の有理式で表される場合の数値解析が可能であり、金属ナノ粒子によるプラズモン共鳴など光領域での問題にも対応できる。

Fig.12 は水(H₂O)中の中空銀(Ag)ナノ粒子の局所プラズモン共鳴の FDTD 解析である^[14]。

Fig.12(a) に解析モデルを示す。解析領域のサイズを 150 × 150 × 2700 [nm]とし 2.5 [nm]の格子サイズで解析を行っている。図(b)に示す銀ナノ粒子の誘電率にはドルーデモデルを用いている、周波数 $f = 350 \sim 750$ [THz]の範囲でシミュレーションを行ったデータのうち、図(c), (d) に波長 545 [nm] ($f = 550$ [THz]) と 710 [nm] ($f = 423$ [THz]) の場合の銀ナノ粒子周辺のエネルギー分布を図示する。照射する光の波長が 545 [nm]で局所プラズモン共鳴が観測される。

吸収境界条件 解析空間内の代表点での電磁界の値を保持しつつ、それらの時間応答を数値的に求めることから、解析領域を有限に留める必要がある。このため、解析領域の外側に吸収境界と呼ばれる仮想の境界を置き、到来する電磁波の反射をなく吸収させる必要がある。到来する電磁界を平面波に近似して反射を抑制する方法や異方性を持つ仮想的な損失媒質層で解析領域を囲むなど種々の方法が提案されている。一般的には Mur の吸収境界条や PML(Perfectly Matched Layer)境界条件と呼ばれる方法が用いられる。

8. まとめ

電磁波問題の解決に使われるいくつかの方法について述べた。境界要素法も電磁波問題の数値解析において有用な手段であるが、電磁波以外の分野でも広く使われていることもあり、今回は説明を省略した。

9. 文献

[1] J.Meixner, "The Behavior of Electromagnetic Fields at Edges," Inst. Math. Sci. Res. EM-72, New York Univ., Dec. 1954.

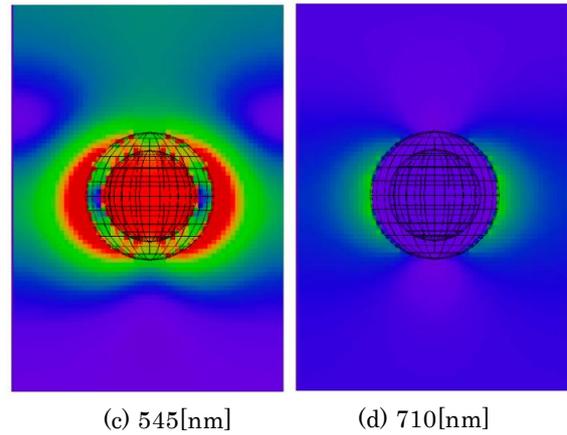
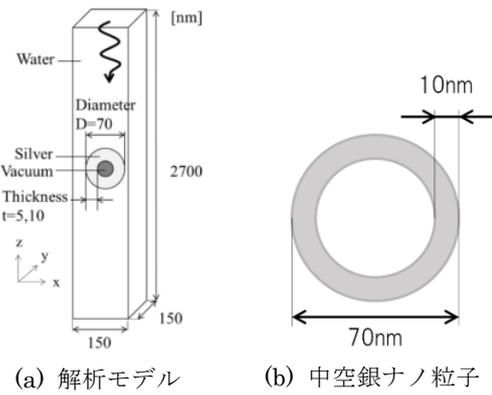


Fig. 12 Field intensity near the hollow Ag nanoparticle

[2] 関口利男, 電磁波, 朝倉書店, 1975.
 [3] R.Mitra and S.W.Lee, Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan Co., 1971.
 [4] 山下栄吉他, 電磁波問題解析の基礎解法, 電子情報通信学会, 1987.
 [5] J.B.Keller, "Geometrical Theory of Diffraction," J. Opt. Soc. Amer., vol.52, 1962.
 [6] G.L.James, Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves, IEE, 1976.
 [7] J.A.Stratton, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, 1941.
 [8] 細野敏夫, BASIC による高速ラプラス変換, 共立出版, 1984.
 [9] R.F.Harrington, Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGrawHill, 1961.
 [10] M.N.O.Sadiku, Numerical Techniques in Electromagnetics, CRC Press, 1992.
 [11] 小暮宏明, 小暮芳江, 電磁界シミュレータで学ぶ高周波の世界, CQ 出版, 2010.
 [12] 橋本修, 阿部琢美, FDTD 時間領域差分法入門, 森北出版, 1996.
 [13] 宇野亨, FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析, コロナ社, 1998.
 [14] URL: <https://www.kagiken.co.jp/keyfddt/analysis/hollow-silver-nanoparticles/>, 電磁波解析 (ナノ粒子) 中空銀ナノ粒子の解析.